

Lineer Cebir I 2. Kısa Sınav SorularıCevap AnahtarıA Grubu

1) $\{(a, b, 2), (1, 1, 1), (1, -1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ alt kümesi ortogonal bir küme olduğuna göre a ve b yi bulunuz.

Çözüm: $\langle (a, b, 2), (1, 1, 1) \rangle = 0 \Rightarrow a + b = -2$

$$\langle (a, b, 2), (1, -1, 0) \rangle = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

$$\begin{array}{r} a + b = -2 \\ a - b = 0 \\ \hline a = -1, b = -1 \end{array}$$

2) $U = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (0, 1, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$ alt kümesinin lineer bağımsızlığını inceleyiniz.

Çözüm: $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$c_1(1, 1, 2) + c_2(1, 2, 1) + c_3(0, 1, 2) = (0, 0, 0) \text{ olsun. } c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ mı?}$$

$$\Rightarrow (c_1, c_1, 2c_1) + (c_2, 2c_2, c_2) + (0, c_3, 2c_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (c_1 + c_2, c_1 + 2c_2 + c_3, 2c_1 + c_2 + 2c_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

$$c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$$

$$2c_1 + c_2 + 2c_3 = 0$$

$c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$ da $c_2 = -c_1$ yazılırsa

$$c_1 - 2c_1 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = c_1 \text{ elde edilir}$$

$2c_1 + c_2 + 2c_3 = 0$ da $c_2 = -c_1, c_3 = c_1$ yazılırsa

$$2c_1 - c_1 + 2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \text{ elde edilir.}$$

$\Rightarrow c_2 = -c_1 = 0, c_3 = c_1 = 0$ olup verilen alt küme

lineer bağımsızdır.

Cevap Anahtarı

B Grubu

1) $\alpha = (1, -2, -3)$, $\beta = (2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri arasındaki θ açısını bulunuz.

Çözümü: $\cos \theta = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$ idi

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle (1, -2, -3), (2, 3, 1) \rangle = 2 - 6 - 3 = -7$$

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\beta\| = \sqrt{\langle \beta, \beta \rangle} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

2) $U = \{(1, 1, 0, 0, -1), (1, -1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0, -1)\} \subset \mathbb{R}^5$ alt kümesi verilmiş.

a) U nun ortogonal küme olduğunu gösteriniz.

b) U dan ortonormal bir küme elde ediniz.

Çözümü: a) $\langle (1, 1, 0, 0, -1), (1, -1, 1, 0, 0) \rangle = 1 - 1 = 0$

$$\langle (1, 1, 0, 0, -1), (-1, 0, 1, 0, -1) \rangle = -1 + 1 = 0$$

$$\langle (1, -1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0, -1) \rangle = -1 + 1 = 0$$

$\Rightarrow U$ ortogonal bir kümedir.

b) $\|(1, 1, 0, 0, -1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

$$\|(1, -1, 1, 0, 0)\| = \sqrt{3}, \quad \|(-1, 0, 1, 0, -1)\| = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 0, 1, 0, -1) \right\}$$

ortonormal bir kümedir.